

# Laboratorium programistyczne 2 - pochodne i wykresy

Projekt „Matematyka dla Ciekawych Świata”,  
Piotr Morawiecki, Robert Paciorek

2022-03-31

## 1 Tworzenie listy za pomocą pętli for

Na ostatnich zajęciach poznaliśmy pętlę `for`, która umożliwia wykonanie sekwencji podobnych komend. Przykładowo możemy za jej pomocą napisać program, który utworzy listę 21 liczb z przedziału od 0 do 10 w równych odstępach:

```
lista = []
for i in range(21):
    lista.append(i/2)
print(lista)
```

Powyższy program tworzy pustą listę, a następnie w pętli `for` dodaje do niej kolejne liczby:

[0.0, 0.5, 1.0, 1.5, ..., 9.5, 10.0]

**Ciekawostka dla zaawansowanych:** Python pozwala nam zapisać tworzenie tej listy za pomocą jednolinijkowej komendy `for`:

```
lista = [i/2 for i in range(21)]
print(lista)
```

Jej działanie jest identyczne do kodu zamieszczonego powyżej, jednak wykorzystywanie jednolinijkowych komend może sprawić, że kod stanie się krótszy i bardziej czytelny. My jednak będziemy głównie korzystać ze standardowej postaci pętli, która dla początkujących może być łatwiejsza w użyciu. Nie mniej możesz używać również wersji jednolinijkowej.

### Zadanie 1.0.1

Stwórz i wypisz na ekran listę zawierającą 16 liczb z przedziału od  $-1$  do  $2$ , t.j.  $[-1.0, -0.8, -0.6, \dots, 1.8, 2.0]$ .

## 2 Wykresy

### 2.1 Biblioteka pyplot

Do rysowania wykresów w Pythonie posłużyć może np. pakiet `matplotlib.pyplot`. Aby go używać, na początku programu musimy go zaimportować i wybrać odpowiedni tryb poleceniami:

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

Do tworzenia wykresów będzie nam służyła funkcja `plot()` z biblioteki zaimportowanej jako `plt`. Będziemy ją wywoływać w sposób następujący: `plt.plot(x, y, format)`, gdzie `x` jest listą kolejnych wartości osi X, `y` jest listą odpowiadających im wartości osi Y, a `format` określa typ rysowanego wykresu. Na przykład:

```
plt.plot([1, 2, 3], [1, 2, 4])
```

Python pozwala nam również ustawić własne nazwy osi pionowej i poziomej, na przykład:

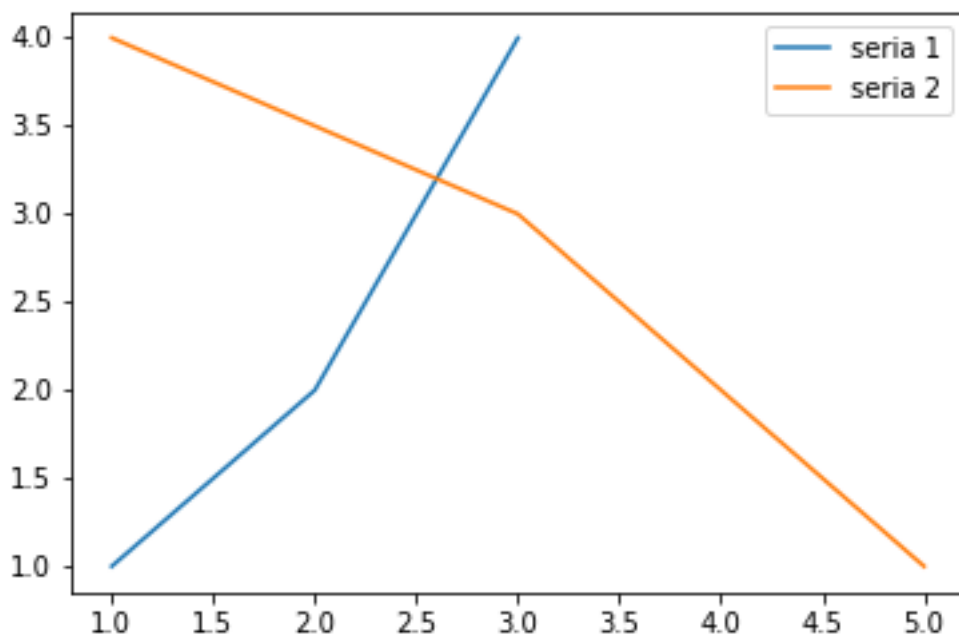
```
plt.xlabel("oś pozioma")  
plt.ylabel("oś pionowa")
```

Wykres możemy wyświetlić za pomocą komendy `plt.show()`

```
plt.show()
```

Biblioteka `pyplot` pozwala nam narysować więcej niż jedną serię danych. W tym celu wystarczy dodać więcej instrukcji `plot()` przed wyświetleniem wykresu. Warto dla czytelności dodać legendę komendą `legend()`:

```
plt.plot([1, 2, 3], [1, 2, 4])  
plt.plot([1, 3, 5], [4, 3, 1])  
  
plt.legend(['seria 1', 'seria 2'])  
plt.show()
```



### Zadanie 2.1.1

Narysuj wykres zawierający pierwsze pięć potęg dwójki.

## 2.2 Rysowanie wykresu funkcji

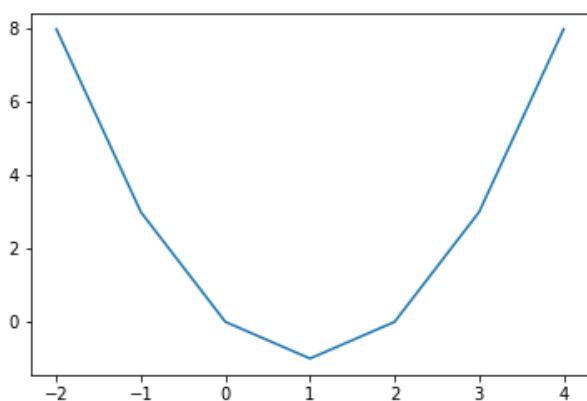
Powiedzmy, że chcielibyśmy narysować wykres pewnej funkcji matematycznej, na przykład  $f(x) = x^2 - 2x$  w zakresie od  $x = -2$  do  $x = 4$ . Możemy to zrobić tworząc listę  $x = [-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4]$ , a następnie obliczając wartość  $f(x)$  dla każdej wartości  $x$  w poniżej przedstawiony sposób:

```
x = range(-2, 5)
f = []
for i in x:
    f.append(i**2-2*i)
plt.plot(x,f)
```

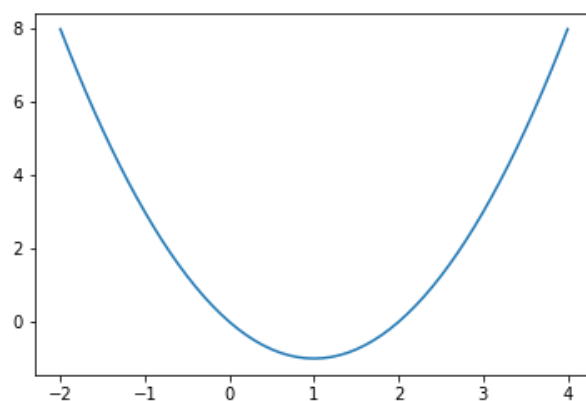
Jednak parabola, którą w ten sposób wygenerowaliśmy ma dość niską rozdzielczość - wygląda bardziej na linię łamaną (patrz Rysunek 1a). Możemy zwiększyć jakość wykresu zwiększając liczbę wartości  $x$ , na przykład do 61. Możemy to zrobić następująco:

```
x = []
f = []
for i in range(61):
    x.append(-2+6*i/60)
    f.append(x[-1]**2-2*x[-1])
plt.plot(x,f)
```

Dla przypomnienia  $x[-1]$  odwołuje się do ostatniego elementu listy  $x$ .



(a) Wykres z 7 punktów.



(b) Wykres ze 101 punktów.

Rysunek 1: Wykres funkcji  $f(x) = x^2 - 2x$

Zwróć uwagę na to, że pierwsza linijka powyższego kodu tworzy listę

$$x = [-2, -1.9, -1.8, -1.7, \dots, 3.9, 4]$$

Po zwiększeniu liczby punktów wykres został wygładzony (patrz Rysunek 1b).

### Zadanie 2.2.1

Utwórz listę  $t$  zawierającą 101 liczb z przedziału od 0 do 10, a następnie oblicz dla nich wartość funkcji  $x(t) = t^2$ ,  $y(t) = 2^t$ . Wykorzystaj utworzone w ten sposób listy, żeby narysować wykres funkcji  $x(t)$  i  $y(t)$ . Pamiętaj o dodaniu czytelnej legendy. Która funkcja rośnie szybciej?

**Zadanie dodatkowe:** Dla jakich przedziałów wartości, funkcja  $x(t) = t^2$  jest wyższa od  $y(t) = 2^t$ ?

Funkcje również możecie łatwo narysować korzystając z różnych narzędzi online, np. w kalkulatorze graficznym dostępnym na stronie <https://www.desmos.com/calculator>. Polecam spróbować narysować wykresy funkcji z poprzedniego zadania w Desmos i porównać je ze sobą.

### 3 Pochodne

Na wykładzie pochodna została zdefiniowana za pomocą granicy

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Na przykład rozważmy pochodną funkcji  $f(x) = x^2$  dla  $x = 1$ . Jest ona zdefiniowana jako:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

Wykorzystując powyższą definicję pochodnej możemy łatwo oszacować wartość pochodnej, obliczając wyrażenie po prawej stronie równania dla małej wartości  $\Delta x$ . Na początku weźmy wartość  $\Delta x = 0.1$ . Obliczmy w Pythonie:

```
x = 1
dx = 0.1
((x+dx)**2 - x**2) / dx
```

Otrzymamy wynik 2.1. **Ciekawostka:** Wynik ten może on zostać wyświetlony jako 2.1000000000000002, jednak obecność 2 na ostatnim miejscu rozwinięcia dziesiętnego jest skutkiem tego, że Python ma ograniczoną precyzję zapisywania liczb w pamięci komputera. Zapisuje je w systemie dwójkowym (binarnym), a nie wszystkie ułamki zapisane w systemie dziesiętnym (np. 2.1) mogą zostać dokładnie zapisane w systemie dwójkowym.

#### Zadanie 3.0.1

Spróbuj stopniowo zmniejszać wartość zmiennej dx, za każdym razem obliczając pochodną funkcji  $f(x) = x^2$  dla  $x = 1$ . Co obserwujesz?

Spróbujmy teraz bardziej systematycznie sprawdzić jak zależy błąd obliczonej pochodnej w zależności od długości kroku dx. W tym celu obliczmy wartość pochodnej dla kilku wybranych wartości dx, a następnie umieścimy je na wykresie.

```
x = 1
dx = [0.1, 0.08, 0.06, 0.04, 0.02, 0.001]
pochodna = []
for i in dx:
    pochodna.append(((x+i)**2 - x**2) / i - 1)
plt.plot(dx, pochodna)
plt.xlabel('dx')
plt.ylabel('błąd oszacowania df/dx dla x=1')
plt.show()
```

Co obserwujesz?

#### Zadanie 3.0.2

Oblicz pochodną funkcji  $f(x) = x^3$  dla  $x = 1$  dla kilku wybranych wielkości dx. Następnie sprawdź za pomocą wykresu czy błąd naszego oszacowania zwiększa się proporcjonalnie od dx.

### Zadanie 3.0.3

Koncentrację wirusów HIV w osoczu krwi leczonego pacjenta opisuje funkcja  $n(t) = t * 2^{-t}$ . W tym zadaniu zbadamy jak pochodna tej funkcji (szybkość wzrostu populacji wirusów) zmienia się w czasie. W tym celu wykonaj następujące zadania:

1. Narysuj wykres tej funkcji dla 101 wartości  $t$  z przedziału od 0 to 10.
2. Spróbuj naszkicować wykres pochodnej tej funkcji bez umieszczania wartości liczbowych na osi pionowej.
3. Następnie oblicz wartość pochodnej w każdym punkcie wykorzystując wybraną małą wartość kroku  $dt$ . Następnie narysuj wykres pochodnej  $\frac{df}{dx}$  dla różnych wartości  $x$ .
4. Czy wykres uzyskany w Pythonie jest zgodny z naszym szkicem?

## 4 Funkcja wykładnicza z wykorzystaniem biblioteki math

Biblioteka `math` zawiera wiele przydatnych funkcji matematycznych. W celu jej zaimportowanie wykorzystaj komendę

```
import math
```

Biblioteka ta zawiera między innymi pierwiastek (`math.sqrt`) funkcję wykładniczą o podstawie  $e$  (`math.exp`), logarytm (`math.log`) oraz wiele innych.

Wykonajmy przykładowe działania z wykorzystaniem tej biblioteki:

```
import math

print(math.sqrt(4))      # pierwiastek z 4
print(math.sqrt(10))    # pierwiastek z 10

print(math.exp(1))      # e do potęgi 1 (czyli e)
print(math.exp(5))      # e do potęgi 5

print(math.log(100))    # logarytm naturalny z 100
print(math.log(100,10)) # logarytm o podstawie 10 ze 100
```

Dokładny opis wszystkich funkcji zawartych w bibliotece `math` można znaleźć w dokumentacji na stronie <https://docs.python.org/3/library/math.html>.

### Zadanie 4.0.1

Oszacuj pochodną funkcji  $f(x) = e^x$  dla różnych wartości  $x$  z przedziału od 1 do 10, a następnie sprawdź czy jest ona równa  $\frac{df}{dx} = e^x$ .

### Zadanie 4.0.2

Oszacuj pochodną logarytmu naturalnego  $f(x) = \ln(x)$  dla różnych wartości  $x$  z przedziału od 0 do 10 (zwróć jednak uwagę, że funkcja nie ma wartości dla  $x = 0$ ). Narysuj wykres pochodnej  $\frac{df}{dx}$  jako funkcji  $x$ . Na podstawie wykresu lub wartości pochodnej, spróbuj odgadnąć jaką prostą funkcję matematyczną przedstawia ten wykres. Sprawdź swoją hipotezę.

## 5 Zadania dodatkowe

### Zadanie 5.0.1

#### Zadanie dla ambitnych.

Napisz funkcję, która obliczy pochodną funkcji  $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  numerycznie. Następnie oblicz wartość funkcji  $f(x)$  i jej pochodnej  $f'(x)$  dla 10000 wartości  $x$  przedziale od  $-1$  do  $1$ , a następnie wykorzystaj je, żeby narysować wykres  $f(x)$  i  $f'(x)$ . Co obserwujesz?

*Podpowiedź: Funkcję  $\sin(x)$  możesz obliczyć za pomocą komendy `math.sin(x)`. Pamiętaj o wcześniejszym zaimportowaniu biblioteki `math`.*

### Zadanie 5.0.2

#### Zadanie dla ambitnych (i bardzo cierpliwych).

Joker znów terroryzuje miasto - musimy wezwać Batmana. W tym celu musisz utworzyć w Pythonie baysygnal. Potrzebne do tego funkcje znajdziesz na stronie <https://mathworld.wolfram.com/BatmanCurve.html><sup>a</sup>. Jeśli ci się uda wyślij go do Batmana na kanał NAUKA/#informatyka na naszym Discordzie. Nasz los jest w twoich rękach!

<sup>a</sup>. Pojawia się w nim funkcja Heaviside'a, którą możesz zapisać jako  $H(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|x|}{x}\right)$

## 6 Praca domowa nr 2

Rozwiązania zadań domowych należy przesłać do czasu następnych ćwiczeń. Prowadzący może również zmienić ostateczny termin przesłania pracy domowej, np. na inną godzinę lub dzień.

Za pracę domową można maksymalnie dostać 6 punktów. Można wybierać zarówno łatwiejsze zadania, jak i trudniejsze, za większą liczbę punktów. Można również rozwiązać zadania za większą liczbę punktów, np. za 10. Jeśli wtedy poprawnie będą rozwiązane zadania za 5 punktów, to zostanie przydzielone 5 punktów. Jeśli będą poprawnie rozwiązane zadania za więcej niż 6 punktów, np. 8 czy 10, to taka osoba otrzyma maksymalnie 6 punktów.

Pamiętaj, żeby notebook był czytelny – każde zadanie powinno być umieszczone w osobnym bloku tekstowym oraz poprzedzone numerem (i opcjonalnie opisem) zadania. Komentarze są mile widziane.

W tym celu wysłania pracy domowej kliknij "Udostępnij" znajdujące się w prawym górnym rogu okna. Następnie w sekcji "Pobierz link" zmień domyślną opcję "Przeglądający" na "Komentujący", a następnie skopiuj podany w oknie link i wyślij do prowadzącemu zajęcia przez Discorda.

### Zadanie 6.0.1 — 1 pkt

Utwórz i wypisz wykorzystując pętlę `for` pierwsze 10 potęg dwójki zaczynając od 2.

### Zadanie 6.0.2 — 1 pkt

Napisz program (lub funkcję), który/a dla dowolnych wartości zmiennych `min`, `max` i `n`, utworzy i wypisze listę `n` równo oddalonych od siebie wartości z przedziału od `min` do `max`. Na przykład dla `min= 2`, `max= 4` i `n= 5` powinien utworzyć listę `[2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0]`.

### Zadanie 6.0.3 — 1 pkt

Oszacuj numerycznie pochodną funkcji  $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$  dla  $x = 1$  i  $x = 0$  i wypisz ją na ekran. Co obserwujesz wraz ze zmniejszaniem kroku  $\Delta x$ ? (opisz w polu tekstowym)

**Zadanie 6.0.4 — 2 pkt**

Na pierwszym wykładzie liczbę Eulera wprowadziliśmy jako wartość graniczną działania

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Oblicz wartość funkcji  $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  dla całkowitych wartości  $n$  od 1 do 1000 i narysuj ją na wykresie (umieszczając  $f$  na osi pionowej, a  $n$  na osi poziomej). Opcjonalnie możesz dodać do wykresu linię poziomą odpowiadającą wartości  $e$ . Czy rzeczywiście wartość  $f(n)$  dąży do stałej wartości?

**Zadanie 6.0.5 — 2 pkt**

Rysując wykres funkcji  $f(x) = x^3 - 3x^2$  i  $g(x) = x - 3$  w Pythonie znajdź (w przybliżeniu) wszystkie miejsca przecięcia tych wykresów.

**Zadanie 6.0.6 — 2 pkt**

Zadanie "miłosne". Narysuj wykres funkcji  $f(x) = \sqrt{1 - (|x| - 1)^2}$  i  $g(x) = -3\sqrt{1 - \sqrt{\frac{1}{2}|x|}}$  w przedziale  $x$  od  $-2$  do  $2$ . Do obliczenia wartości bezwzględnej możesz posłużyć się funkcją `abs()`.

**Zadanie 6.0.7 — 3 pkt**

**Zadanie dla zaawansowanych.** W jednym z zadań na ćwiczeniach z matematyki pokazywaliśmy, że funkcję wykładniczą  $f(x) = e^x$  można przedstawić jako nieskończoną sumę

$$f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Napisz funkcję, która oblicza sumę pierwszych  $n$  wyrazów, t.j.  $g(x, n) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ . Następnie narysuj wykres funkcji  $f(x) = e^x$  oraz funkcji  $g(x, n)$  dla kilku wartości  $n$  (np.  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ). Co obserwujesz?

**Zadanie 6.0.8 — 3 pkt**

Narysuj wykresy tych funkcji w jednym układzie współrzędnych (na jednym ekranie). W jaki sposób są one powiązane między sobą (opisz słownie w polu tekstowym)?

1.  $y = 2^x$ ,  $y = e^x$ ,  $y = 5^x$ ,  $y = 20^x$ ;
2.  $y = e^x$ ,  $y = e^{-x}$ ,  $y = 8^x$ ,  $y = 8^{-x}$ ;
3.  $y = 3^x$ ,  $y = 10^x$ ,  $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ ,  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ;
4.  $y = 0,9^x$ ,  $y = 0,3^x$ ,  $y = 0,6^x$ ,  $y = 0,1^x$ .